Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura

Denise Silva Vilela*
Karine Angélica de Deus**

Resumo
O presente texto visa explicitar alguns valores presentes na matemática escolar, especificamente no procedimento dedutivo, e, portanto, na demonstração. Nosso olhar para a matemática e sua organização lógico dedutiva ocorrerá de um ponto de vista cultural, respaldado por abordagens provenientes do campo da etnomatemática que discutem que toda prática é imbricada de valores. Mostraremos que, nas orientações curriculares e em guias do Programa Nacional de Livros Didáticos atuais, a demonstração permanece sendo valorizada na matemática escolar. Para explicitar os valores serão consideradas demonstrações contidas em “Os Elementos” de Euclides de forma a mostrar como a matemática, mais especificamente a geometria, incorporou a lógica aristotélica assim como a valorização do conhecimento dedutivo sob o indutivo. Sendo a matemática vista como uma ciência dedutiva, argumentamos que nela ainda se coloca a superioridade desta em relação a outros conhecimentos. Os processos dedutivos realizados na matemática escolar serão problematizados para além da noção de rigor, trazendo valores associados a eles.
Palavras-chave: valores; dedução; silogismo; lógica; Os Elementos de Euclides.

Mathematics, adjective: The demonstration by the perspective of culture

Abstract
The present text aims to clarify some values in school mathematics, specifically in the deductive procedure, and therefore in demonstration. Our approach to mathematics and its deductive logical organization will focus on a cultural perspective, based on ethnomathematics which discuss that every practice is closely tied to values. We will show, both in the current curricular guidelines as in National Textbook Program, that demonstration is valuable in school mathematics. To clarify these values, we will take into account demonstrations contained in Euclid’s Elements, in order to show how mathematics, specifically geometry, incorporated Aristotelian logic as well as the appreciation of deductive knowledge under the inductive. Since math is conceived as a deductive science, we argue that it still gives it a higher position in relation to other forms of knowledge. Deductive procedures held in school mathematics will be discussed beyond the notion of accuracy, bringing some related values.
Keywords: values; deduction; syllogism; logic; Euclid’s Elements.

Introdução

A matemática é um dos componentes mais conservadores e tradicionais do sistema de ensino (D’AMBROSIO, 2002, p.8). Predomina uma visão de neutralidade e de independência da matemática em relação ao contexto sociocultural e, principalmente, ao contexto político e cultural, que vem sendo amplamente criticada por abordagens culturais tal como a etnomatemática. Numa perspectiva ética, histórica e antropológica a etnomatemática se coloca contrária ao eurocentrismo, uma forma particular de etnocentrismo, entendido como um modo de narrar determinados períodos da história pela ótica europeia, assim como olha para outras culturas não-europeias de forma exótica ou inferior (ROCHA, 1988).

A matemática pode ser vista como coração do projeto civilizatório que teve a racionalidade como possibilidade de avanço. Mas, deve ser considerado que este ideal de progresso justificou colonialismo, a pureza justificou os regimes políticos totalitários, o projeto de homogeneização dos currículos justifica intolerância com o diferente e com o multiculturalismo e a supervalorização do “rigor lógico” justifica o mascaramento de práticas conflituosas.

Nosso ponto de vista pressupõe que valores são sempre conduzidos nas práticas escolares, inclusive quando estes conteúdos e métodos se dizem neutros. A matemática conduz e dissemina valores éticos ao fortalecer e estimular o pensamento racional, a objetividade, o controle, a previsão, a abstração, a generalização, a disciplina, a redução, a simplificação, a dicotomia, a

* Endereço eletrônico: denisevilela@ufscar.br
** endereço eletrônico: karineangelicadedeus@gmail.com

regularidade, a simetria, a uniformidade e a precisão. Nesse sentido, diversas ideias vêm sendo desenvolvidas em diferentes áreas, inclusive provenientes do campo da etnomatemática, vinculando este campo aos estudos que do campo da ética, com a intenção de aumentar a consciência acerca das crenças e dos valores da matemática ocidental (BISHOP et al., 1999).

Bishop et al. (1999, p. 1) afirmam que "embora o ensino de valores aconteça inevitavelmente em todas as salas de aula de matemática, eles parecem estar, na maior parte das vezes, implícitos". Os autores afirmam que os desenvolvimentos recentes dos estudos culturais e políticos, vinculados à matemática, negam que a ela seja "isenta de valor".

A crítica à neutralidade do conhecimento científico, e da matemática em particular, é aqui entendida como a impossibilidade de tais conhecimentos não conduzirem valores: "o axioma da neutralidade valorativa das ciências sociais conduz a negar - ou melhor, a ignorar - o condicionamento sócio histórico do conhecimento. A própria questão da relação entre conhecimento científico e classes sociais geralmente não é colocada" (LOWY, 1988, p. 18).

David Bloor (2009, p. 131) propõe dessacralizar a matemática, desmistificá-la, afastá-la da ideia de uma matemática que existira para além do mundo social e, portanto, para este autor, valores morais reinam na ciência. Por exemplo, o ideal de um lugar da verdade, uma verdade postulada como instância suprema é visto neste artigo como um valor moral a ser decodificado devido aos desdobramentos na prática educativa. Nosso argumento se organiza na direção de mostrar que a verdade não teria como condição a evidência e a certeza, e, além disso, este pressuposto da verdade pode gerar a necessidade do esquecimento e o auto-apagamento em torno do consumo passivo dos conhecimentos curriculares.

Em sintonia com Bishop et al (1999), temos como pressuposto que a matemática, e a demonstração em particular, disciplinam o pensamento. O termo disciplina aqui é entendido não só como uma divisão do saber em ramos, o que possibilitou especialização e aprofundamento, mas, sobretudo, no sentido de disciplinar o espírito, como um "fenômeno de aculturação", de controle e ordem dos indivíduos e, nesse sentido, temos Chervel (1990) como referência.

Chervel (1990), em sua abordagem sociológica sobre a história das disciplinas escolares, leva em conta a função disciplinadora da escola em que os conteúdos são um meio e não o fim em si, um meio de aculturação, de imposição de regras e formas de pensamento. Assim, para o autor, "uma disciplina é (...) em qualquer campo que se a encontre, um modo de disciplinar o espírito, quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte" (CHERVEL, 1990, p. 184). Uma disciplina escolar comportará além da prática docente, os fins que contribuíram para sua constituição bem como "o fenômeno de aculturação de massa que ela determina" (CHERVEL, 1990, p. 184).

Nesse sentido, a demonstração pode ser vista como um procedimento que seleciona e privilegia um modo de pensar e de abordar o conhecimento em detrimento de outros. Ele não é neutro, mas resultado de seleções definidas a partir de lutas sociais e dissemina valores relativos a interesses particulares, ou seja, ele está relacionado ao poder que impõe este valor. Isto pode remeter, mas não será o caso neste artigo, a perguntar a quem interessa esse valor, essa forma de pensar.

Neste artigo o objetivo é explicitar alguns desses valores presentes na matemática escolar, especificamente por meio do recurso da demonstração, secularmente valorizado e associado também à geometria euclidiana. Para tanto tomaremos como objeto demonstrações que compõe a obra "Os Elementos" de Euclides (2009) para analisá-las mediante os aspectos lógicos e valorativos, tais como a superioridade do conhecimento dedutivo sob o indutivo, tratados por Aristóteles (384-322 a.C.). Esta obra de Euclides teve grande repercussão, ampla apropriação e forte influência no pensamento ocidental, considerada, em muitas ocasiões até o século XIX, um modelo do que o pensamento científico deveria ser (BARKER, 1969). No Brasil, até o final da década de 50 esse ensino era, em sua maior parte, caracterizado pela ênfase ao modelo euclidiano e à concepção platônica da matemática (FIORENTINI, 1995).

Com essa análise pretendemos dar visibilidade a uma crença na superioridade da matemática em relação a outros conhecimentos, a generalização e o modo matemático de "disciplinar do espírito" (CHERVEL, 1991) ou, ensinar e valorizar um modo específico de pensar.

Consideramos a noção de cultura como formas simbólicas em contextos específicos a partir da qual nos propomos a explicitar processos de valorização, definição de normas e padrões, e "os fenômenos culturais como formas de manifestação de poder" (THOMPSON, 2005). Segundo Thompson, as formas simbólicas podem, de diferentes maneiras, carregar os traços das condições de sua produção, fato este que poderíamos exemplificar pensando na valorização da matemática acadêmica dentro do contexto escolar, sendo que esta ocorreu também em decorrência da valorização do conhecimento científico nos séculos XVIII e XIX e da crença da matemática como luz da ciência intimamente conectada a essa valorização.

Neste sentido a matemática, e em particular a demonstração na geometria euclidiana, por meio de um recorte específico e singular, será olhada como produzindo cultura e sendo reconduzida a esta condição. Se quisermos colocar em forma de pergunta, podemos dizer: que cultura a demonstração matemática produz, conduz e dissemina? Ou, que valores e que forma de pensamento esta geometria gera? Dito por quem, ou, que autoridades vêm assegurando essa valorização? Especificamente, nos propomos a estudar valores que podem ser associados ao proceder demonstrativamente e a valorização deste procedimento. Este olhar permite identificar valores e usos privilegiados a partir de um objeto privilegiado – a demonstração- não para afirmá-lo universalmente, mas para aprofundar esta reflexão.

A justificativa para se lançar um olhar cultural sob o tema da demonstração se pauta nas ideias de "tolerância e pluralismo". Como expressa Putnam (1999), na atualidade "tendemos a considerar plenamente assumidos as ideias de tolerância e pluralismo", e, ainda, diz o autor, este olhar é indício de vitalidade enquanto que a negação da diversidade seria indício de decadência e heresia.

Pela grande importância na escola atual da matemática e por sua organização lógico-dedutiva - uma expressão de uma forma de pensar valorizada e incentivada em propostas curriculares - olhá-la do ponto de vista cultural contribui em discussões educacionais.

Entendemos que para escapar do etnocentrismo, na direção do pluralismo, é preciso ver e ver de outro modo, estranhar, neste caso, a matemática, a geometria de Euclides, a lógica e o pensamento racional. Ou, dizendo de outra forma, a pergunta avança em relação a que conteúdos são articulados dedutivamente na geometria de Euclides para "ver que a verdade está mais no olhar do que naquilo que é olhado" (ROCHA, 1988, p. 20).

Neste sentido o artigo se organiza, primeiramente, mostrando a presença atualmente da demonstração na matemática escolar o que corrobora a afirmação de ser a matemática um campo tradicional e um dos componentes mais conservadores do sistema de ensino (D'AMBROSIO, 2002). Em seguida, apresentaremos um modo como a matemática incorporou a lógica aristotélica e os aspectos que podem ser associados a valores, tais como a crença na verdade e na superioridade do conhecimento dedutivo sob o indutivo e, consequentemente, a superioridade da matemática que incorpora, apropria e foi elaborada nesta forma de apresentação axiomática dedutiva. Dessa forma mostraremos um caso em que a matemática dissemina valores também nas práticas escolares. Para concluir, retomamos os propósitos deste estudo que visa não resolver um problema, mas compreendê-lo e analisá-lo em seus desdobramentos pedagógicos.

Esclarecemos que, em sintonia com a revisão da bibliografia, estamos usando o termo demonstração como um procedimento formal, lógico-dedutivo e o termo "lógica" está sendo empregado aqui como lógica formal, uma área do conhecimento que trata dos conceitos, dos juízos e dos raciocínios, que independem de seu conteúdo.

A demonstração na matemática escolar

Mesmo após a crise dos fundamentos, a busca da verdade matemática é vista como fundamental na atividade do matemático[1]. O procedimento da demonstração, símbolo de rigor e precisão, é entendido como um critério para o estabelecimento dessa verdade assim como é valorizado como uma forma superior entre os modos de conhecer. A demonstração pode ser vista, portanto, como um meio de disseminar ou estimular valores na matemática enquanto disciplina escolar em diferentes níveis de escolaridade. Essa é a ênfase deste artigo que optou por considerar as demonstrações da geometria, e em especial, em Os Elementos de Euclides, por ser, ainda hoje, referência neste tema, conforme corroboram as pesquisas, mencionadas ao longo desta sessão.

Euclides reuniu e apresentou de modo sistemático em Os Elementos uma parte importante do conhecimento matemático desenvolvido por seus precursores. Esta obra exerceu influência no desenvolvimento da matemática e no ensino tanto pela presença da demonstração como também por ser usada como livro didático. Ainda hoje podemos perceber que o modelo de demonstração presente em Os Elementos, assim como as demonstrações propriamente, tem presença no ensino de matemática e é um modelo de forma de pensar que merece atenção. A demonstração como garantia de verdade faz com que esse procedimento seja valorizado, tanto no interior da prática acadêmica da matemática quanto da escolar.

Para ilustrar a afirmação, da presença da demonstração na escola na atualidade, podemos mencionar o Programa Nacional de Livro Didático (PNLD), que é um programa que abrange quase a totalidade da nação, se for considerado os investimentos no Ensino Fundamental e Médio, e envolve um montante de mais de 1,2 bilhões de reais[2]. Para um livro ser aprovado pelo PNLD e ser distribuído no país, uma das condições necessárias é que essa obra atenda a todos os critérios de avaliação pré-estabelecidos.

O uso correto do encadeamento lógico tal como foi organizado a obra de Euclides é um dos critérios eliminatórios do PNLD, específicos para avaliação e aprovação de coleções de livros didáticos de matemática: "apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas"[3] (BRASIL, 2014, p. 14). Além disso, em alguns trechos do guia do Ensino Médio, observamos a preocupação em colocar em evidência o método dedutivo e conceitos que compõem a matemática acadêmica:

> *(...) especialmente a partir da civilização grega, o método dedutivo tem predominado e assume a primazia de ser o único método aceito, na comunidade matemática, para a comprovação de um fato matemático. Os conceitos de axioma, definição, teorema e demonstração são o cerne desse método e, por extensão, passaram a ser, para muitos, a face mais visível da Matemática (BRASIL, 2014, p. 11).*

Desta forma, a demonstração está presente nos livros e nas orientações voltadas para salas de aula de matemática. Vemos também que a valorização do procedimento da demonstração, enfatizada acima, está associada à possibilidade de ser um método de comprovação de resultados matemáticos. A crença na demonstração dissemina a crença na verdade.

Pesquisas que discutem o papel da demonstração na matemática escolar afirmam a necessidade de que esta abordagem seja feita no ambiente escolar de forma distinta do acadêmico (GARNICA, 1995; PIETROPAOLO, 2005; BALACHEFF, 2000; HANNA, 1990; MOREIRA, 2004). Além disso, Balacheff (2000) e Hanna (1990), e outros autores que os utilizam por referência, enfatizam que a demonstração é um procedimento tipicamente matemático e atribuem um lugar específico para ela também no ambiente escolar – no mais alto nível de rigor, comparando-a hierarquicamente a outras práticas ditas menos rigorosas no processo de validação, tal como a "explicação" ou prova[4] (BALACHEFF, 2000).

Por um lado, algumas pesquisas em educação matemática, tal como Hanna (1990), têm colocado mais ênfase no conceito de prova como argumento convincente, procurando diferentes maneiras de se validar afirmativas em sala de aula que não somente por meio da demonstração, buscando afastar a rigidez e dependência extrema às demonstrações da matemática escolar. A hierarquia é relativizada. Nesta direção podemos citar também a pesquisa de Moreira (2004, p. 27) que, mesmo não tendo a demonstração foco principal de seu trabalho, toca nesse assunto, discutindo que "na matemática escolar, a prova dedutiva rigorosa não é a única forma aceitável de demonstração". Moreira (2004) argumenta que justificativas mais livres, menos formais, podem levar a uma compreensão mais aprofundada da matemática citando, como exemplo, o uso de dobraduras de papel para a verificação de fatos da geometria, podendo ser mais convincentes na escola do que as demonstrações formais.

Por outro, mesmo sendo favorável ao trabalho na escola com diferentes níveis de provas, Balacheff (2000) não perde de vista que este contato pode permitir aos estudantes, futuramente, compreender o significado da demonstração e produzi-la. Neste caso, a demonstração formal é vista como um objetivo final a ser atingido pelo estudante. Ambas as crenças na demonstração e na hierarquia se mantém.

É importante enfatizar, para este artigo, que estas pesquisas de fato contribuem para que seja repensada a demonstração na matemática escolar, propondo outros tipos de argumentos para convencer os estudantes a respeito dos resultados da matemática. No entanto, elas não chegam a desnaturalizar e problematizar a demonstração na matemática escolar. A nosso ver as pesquisas podem ser vistas como que girando em torno do paradigma da demonstração, reafirmando-a com a norma de referência do conhecimento matemático. Considerar diferentes formas de argumentação aparenta ser diferente, no entanto, pode acabar por sustentar não só a demonstração como também a hierarquia entre os procedimentos de validação assim como sustentar o ideal de apreensão da verdade, mantendo a modulação epistemológica.

Podemos afirmar que a demonstração está naturalizada na matemática e é valorizada na escola, sendo indicada e garantida em documentos de orientações curriculares e guias do PNLD, que, então, podem ser entendidos como autoridades que veem assegurando essa valorização do pensamento lógico.

Nas sessões seguintes passaremos a analisar o procedimento da demonstração em Os Elementos de Euclides tendo como referência a aspectos da lógica sistematizada por Aristóteles no Organum, sobretudo no segundo e terceiro volumes, respectivamente, Analíticos Anteriores e Analíticos Posteriores. Desse modo pretende-se empreender a buscar valores e formas de pensamento que permeiam esta geometria.

A dedução como desdobramentos de verdades

O objetivo desta sessão é apresentar o entendimento da demonstração como desdobramentos de verdades assim como a superioridade da dedução sobre a indução nos escritos de Aristóteles.

Nosso pensamento ocidental é fortemente marcado por traços da lógica aristotélica em que a dedução é valorizada e vista entre os modos de conhecer como um procedimento superior por ser, segundo este filósofo, mais seguro do ponto de vista da certeza e da verdade.

Aristóteles se dedicou à lógica e a outros conhecimentos tal como física, biologia, ética, poética e metafísica. Mediante esta separação ou divisão de conhecimentos podemos considerar a produção deste filósofo, ao mesmo tempo como um antecedente da especialização e divisão do trabalho intelectual na cultura ocidental, divisão da ciência em ramos, como, também, precursor desta cultura que valoriza classificações e o conhecimento dedutivo e demonstrativo e os vê como verdade.

Entre os vários conhecimentos organizados por Aristóteles, podemos perceber que muitos deles caíram por terra a partir da idade moderna. Se por um lado as explicações formuladas pelo estagirita sobre o *movimento* foram devastadas, por outro, categorizar, classificar e demonstrar permanece como formas essenciais do pensamento. Neste sentido, é visível a divisão em categorias e a organização disciplinar do conhecimento[5] e a presença da lógica na matemática, conforme será colocado a seguir.

A lógica aristotélica frequentemente é denominada de lógica clássica, distinguindo-a da lógica matemática, atribuída a Frege[6], e das lógicas não clássicas desenvolvidas recentemente, no século XX, que ampliam ou alteram os princípios ou axiomas da lógica aristotélica.

A primeira sistematização dessa lógica, realizada por Aristóteles, baseia-se em três princípios que regem as leis formais do pensamento lógico[7]:

- Princípio da identidade: cada coisa é igual a si mesma; em símbolos: $(A = A)$.
- Princípio da não contradição: algo não pode ser e não ser ao mesmo tempo; em símbolos: $\neg(A \wedge \neg A)$.
- Princípio do terceiro excluído: uma proposição é verdadeira ou falsa, e não existe terceira opção; em símbolos: $(A \vee \neg A)$.

A partir desses princípios, Aristóteles estruturou o silogismo que é um processo substancialmente dedutivo, tendo a forma proposicional estruturada como sujeito/cópula/ predicado, ou A é B. O silogismo é composto por duas proposições e uma conclusão que, seguindo as regras, conduzem a uma inferência válida: de premissas verdadeiras obtêm-se, pelas regras, conclusões verdadeiras. As proposições são frases estruturadas de tal modo que podem necessariamente serem classificadas como verdadeiras ou falsas, nunca podendo ser ambas ao mesmo tempo, ou seja, devem satisfazer o princípio do terceiro excluído. A primeira proposição é chamada premissa maior, a segunda, premissa menor. A conclusão é formada por dois termos, os quais são chamados de extremo menor e extremo maior e o termo médio é aquele que liga as duas premissas.

As regras dos silogismos ficaram conhecidas através das figuras[8] dos silogismos e de uma série de normas que acompanhavam tais figuras. Na Idade Média, as regras foram reeditadas pelo que ficou conhecido como *modus tolens* e *modus ponens*. .De fato, esses princípios e a relação da lógica com a argumentação permaneceram e sofreram alterações não significativas, dentro dos nossos propósitos, até o final do século XIX, quando Frege (1848-1925), na elaboração dos Fundamentos da Aritmética (1884), além de inaugurar a lógica matemática ou lógica simbólica, plantou paradoxos que desencadeou, entre outras coisas, avanços significativos tais como as lógicas não clássicas[9].

Na lógica de Aristóteles, assim como em toda lógica que se seguiu, não se considera os conteúdos das sentenças que compõe a argumentação, mas sim a forma de conectar as sentenças que a compõe, ou seja, "o modo como umas são deduzidas das outras" (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 14). Por isso, não se diz que um argumento é verdadeiro ou falso, o que cabe à proposição, e sim que o argumento é válido ou não válido.

Neste sentido pode-se dizer que a lógica se caracteriza pela primazia da forma sob o conteúdo. Aristóteles, assim, trata das formas adequadas de argumentação, isto é dos argumentos válidos ou não válidos. A validade do argumento não depende da verdade ou falsidade das sentenças que o compõem e das regras de dedução:

> *Se me garantem, por exemplo, que Todo homem é forte e que Darci é um homem, logo, posso concluir que Darci é forte, e tal conclusão depende apenas da forma da argumentação. É como se me dissessem que Todo a é b e que x é a – disso podemos concluir que x é b, independentemente do significado de a, b e x (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 14).*

A dedução é um modo de conhecer típico de se obter o conhecimento matemático. Aristóteles classifica os modos de conhecer em conhecimento intuitivo, indutivo e dedutivo (VILELA; DORTA, 2010). A intuição é a apreensão imediata e, por meio dela, se estabelecem as noções comuns, axiomas ou princípios (termos). A indução comporta certo grau de probabilidade, em que, a partir do particular, se demonstra o geral, ou seja, por meio da verificação de casos particulares em que certas características consideradas como norma se repetem a cada evento, leva-se a afirmar uma regra geral que supõe ser válida para casos ainda não verificados.

Dos modos de conhecer nos importa especialmente a dedução por sua relação com a matemática e uma vez que é esta, segundo Aristóteles, um procedimento que garante a verdade. É o procedimento dedutivo que extrai o particular do universal. Mas, importa também a intuição, pois, a dedução é apresentada como o resultado de proceder a partir das premissas que podem ou ser axioma - que decorrem da intuição - ou ser proposições já demonstradas. Neste último caso, a demonstração para garantir a validade absoluta do conhecimento levaria a regressão infinita – demonstrar as premissas da premissa indefinidamente – ou ao círculo vicioso ("*Petitio Principii*") – recorrer a algo do qual a própria demonstração depende.

Aristóteles discute nos Analíticos Posteriores essa dificuldade e conclui que nem todo conhecimento é demonstrado. Para Aristóteles nem todas as premissas são demonstráveis, pois o círculo vicioso e o regresso ao infinito não são caminhos lógicos aceitáveis nesta lógica. Portanto, há premissas indemonstráveis:

> *(...) a nossa doutrina é de que todo conhecimento é demonstrativo mais que o conhecimento das proposições imediatas é, pelo contrário independente da demonstração (ARISTÓTELES, 72b, p.18).*
> *(...) ela (a demonstração universal) aplicar-se-á a todos os sujeitos, mas, não obstante, o primeiro e universal não será demonstrado (ARISTÓTELES, 74a, p.26).*

Deduções são silogismos válidos em que se procede por proposições, em que de duas verdades implica-se necessariamente uma terceira verdade. O procedimento dedutivo é uma forma privilegiada, segundo o filósofo, de adquirir conhecimento. Mas a veracidade da conclusão depende da veracidade das premissas que fica garantida pela demonstração ou pelos axiomas obtidos pela intuição. Estes elementos compõe uma demonstração:

> *Toda a arte demonstrativa gira em torno de três elementos: isso cujo ser se supõe (ou seja, o gênero cujas propriedades essenciais ela contempla); os princípios comuns, chamamos axiomas, verdades primeiras através das quais se processa a demonstração; e, em terceiro lugar, as propriedades, de que a ciência supõe, para cada uma delas, o significado. Todavia, algumas ciências podem, sem inconveniente, negligenciar alguns destes elementos, por exemplo: uma ciência pode dispensar-se de propor o ser do gênero, se*

> *este for evidente (é assim que o ser do número não é tão óbvio como o ser do frio e do calor); podemos ainda não propor o significado das propriedades quando elas são óbvias. Não há também necessidade de propor o significado de axiomas comuns quais estes – se de coisas iguais subtraímos coisas iguais, os restos são iguais, pois este principio é bem conhecido. Mas não é menos verdadeiro que, por natureza, os elementos da demonstração são deveras três: o sujeito*[10] *da demonstração, as propriedades que se demonstram, e os princípios que se parte (ARISTÓTELES, 76b, p. 40-41).*

Para Aristóteles, demonstração é o silogismo científico, que se diferencia do silogismo em geral porque diz respeito, além da formalidade da inferência, a veracidade das premissas e das consequências. Assim, no silogismo científico não só a forma, mas também os conteúdos se fazem importante, pois, somente do verdadeiro se precede o verdadeiro. Além disso, para Aristóteles (1987), cada ciência deve assumir a existência de objetos e caracterizá-los pela definição. Deste modo, se a veracidade das definições e premissas está garantida, e se elas forem, quanto à *quantidade*, universais, sua conclusão, conforme as regras dos silogismos, garante uma conclusão verdadeira, universal[11] e eterna:

> *(...) se as premissas de onde o silogismo procede são universais, a conclusão de uma demonstração tal, de uma demonstração assumida em acepção absoluta, é necessariamente eterna (irrevogável) (ARISTÓTELES, 75b, p.35).*

Aristóteles nos remete a ideia do procedimento dedutivo como desdobramento de verdades, pois além da caracterização dos silogismos, em seus escritos vemos que a demonstração é um silogismo elaborado tendo por base premissas necessárias:

> *Por demonstração entendo o silogismo que leva ao saber, e digo que leva ao saber o silogismo cuja inteligência é para nós a ciência. Supondo que o conhecimento por ciência consiste deveras nisso que propusemos, é necessário também que a ciência demonstrativa arranque de premissas verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas do que a conclusão, ou anteriores a esta, e da qual elas são as causas. Pode haver silogismo sem estas características, mas não será uma demonstração (ARISTÓTELES, 71b p.12).*

Para Aristóteles, a dedução é uma forma superior à indução - uma vez que esta última não goza do mesmo rigor e grau de veracidade da dedução que se constitui em desdobramentos de verdades. É um tipo de raciocínio que parte de premissas e destas se retira a conclusão, ou seja, a conclusão deriva logicamente das premissas.

A superioridade da dedução sobre a indução nos escritos de Aristóteles pode ser indicada a partir dos seguintes trechos:

> *Ora, a demonstração efectua-se a partir dos universais, e a indução, a partir dos particulares (ARISTÓTELES, 81a, p. 65).*

> *Ora, quem detém o universal também conhece o particular, enquanto o que conhece o particular não conhece o universal. De onde resulta que, ainda por esta razão, a demonstração universal é preferível (...) A prova mais clara da superioridade da demonstração universal é: se, de duas proposições conhecemos a anterior, conhecemos também, de certo modo, a posterior - conhecemo-la em potência. Se soubermos, por exemplo, que todo triângulo tem ângulos iguais a dois retos, sabemos de certo modo, isto é, em potência que o isósceles também têm os ângulos iguais a dois retos (ARISTÓTELES, 86a, p.89).*

Ainda quanto às demonstrações, Aristóteles as classifica hierarquicamente, isto é, a superioridade da demonstração universal sob a particular, bem como da afirmativa sob a negativa e desta última sob a redução por absurdo:

> *A demonstração afirmativa e a demonstração negativa fazem-se ambas através de três termos e através de duas premissas, mas enquanto a primeira assume apenas que algo é, a segunda assume ao mesmo tempo que algo é, e que algo não é; ela opera, portanto, através de um maior número de premissas; logo é inferior*

> *(ARISTÓTELES, 86b p.91).*
>
> *Como a demonstração afirmativa é superior à demonstração negativa, torna-se evidente que é também superior à demonstração por redução ao absurdo (ARISTÓTELES, cap.26 87a p.93).*

Aristóteles explica neste trecho a diferença entre a demonstração negativa e a por redução ao absurdo. Primeiramente expomos o que Aristóteles cita quanto à demonstração negativa:

> *Admitamos que A não se predica de nenhum B, e que B se predica de todo C – logo, é necessário que A não se diga de nenhum C. Com estas premissas, a demonstração negativa de que A não se diz de C é directa (ARISTÓTELES, 87a, p. 94).*

Com relação à demonstração por redução ao absurdo:

> *Admitamos que temos de provar que A não se diz de B. Temos de propor que se diz, e também que B se diz de C, de modo que o resultado é que A se predica de C. Admitamos como conhecido e como consentido que tal é impossível. Deduzimos então que A não se pode predicar de B. Se concordamos que B se predica de C, é impossível que A se predique de B (ARISTÓTELES, 87a, p. 94).*

Neste artigo, nossa ênfase é cultural, isto é, podemos ver a crença na associação da dedução com a verdade desconsiderando para esta afirmação que ela opera a partir de princípios que são "verdades intuitivas". Isto porque a lógica se ocupa da forma e sua validade depende disso, assim pode ser dedutiva ou silogística, mas ela opera a partir da intuição. Assim, se for o caso de ser verdadeira a proposição, a lógica dedutiva seria, de fato, um modo de conduzir à verdade, no sentido de uma garantia de autônomia, por desdobramentos, sem interferências. O que estamos salientando é o fato de que a validade do argumento não garante a verdade do conhecimento dedutivo.

Enfatizamos, dessa maneira, aspectos da lógica aristotélica presente em Os Elementos. Além disso, o método dedutivo consolidou-se como modelo para toda a matemática contemporânea, sendo que a obra "Os Elementos" de Euclides – que será abordada em seguida - pode ser considerada uma peça importante nesse processo de condução e propagação de modo de proceder assim como dos valores de superioridade e verdade associado a este procedimento. Por muitos anos os matemáticos viram no trabalho de Euclides um modelo de ideal de exatidão. A matemática passa a ser a representante principal e exemplar de uma ciência dedutiva, assim como a maneira formal como Euclides apresentou o conteúdo matemático da época tornou-se o "protótipo da forma matemática moderna" (EVES, 2004, p. 178). Como o método dedutivo era visto como uma forma superior de raciocínio, a matemática assumindo características dedutivas passa a ter essa qualificação, o que faz com que essa forma de pensamento, ou seja, lógico-dedutivo seja valorizada e privilegiada.

Categorizar e demonstrar: aspectos da lógica aristotélica em Os Elementos de Euclides

Euclides viveu por volta de 300 a.C. e ensinava matemática na escola de Alexandria. Uma obra de sua autoria que sobreviveu e uma versão dela chegaram até nós, Os Elementos, é objeto de nossa pesquisa. A obra Os Elementos é composto de 13 "livros" que abrangem praticamente todo o assunto de matemática tratado até o nível secundário: O livro I é sobre a geometria plana – triângulos, interseção entre retas, teoria das paralelas, as figuras geométricas e suas áreas; o livro II constitui-se de grande parte da álgebra geométrica, onde se demonstra por via da geometria as identidades, por exemplo, que hoje conhecemos como "identidades notáveis": $a(b+c+d)=ab+ac+ad$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, etc; o livro III trata da geometria do círculo; o livro IV também trata do círculo, mas neste livro, com relação às figuras retilíneas – perímetro, figuras inscritas, circunscritas, etc.; o livro V traz a teoria da proporção; o livro VI contém aplicações da geometria plana, a teoria geral das proporções do livro V. Os seguintes, ou seja, os livros VII ao X tratam da teoria dos números - séries, multiplicações, incomensurabilidade. Os três últimos contém a geometria espacial. Por abranger assuntos de matemática que são tratados na educação básica, podemos, afirmar tanto a presença de valores da demonstração como superior e verdadeiro, como a presença dos temas dos Elementos na educação matemática escolar.

É sabido que Euclides não fora autor do conteúdo exposto em Os Elementos. A ele é atribuído o mérito da organização dos resultados conhecidos na ocasião. Euclides sistematizou o conhecimento matemático de seus precursores através do método axiomático dedutivo que encontra uma correspondência na obra Organon de Aristóteles, que, por sua vez, pode ser considerado sistematizador dessa lógica, da qual recortamos, também como objeto dessa pesquisa, a demonstração. Para este texto tomou-se por referência, sobretudo a tradução de Bicudo (EUCLIDES, 2009) desta obra de Euclides, da qual serão consideradas algumas proposições do livro I para observar a forma como a obra incorpora a lógica aristotélica.

O emprego da lógica aristotélica para apresentar o conteúdo de geometria conhecido na ocasião evidencia como a matemática incorporou profundamente um modo de pensamento racional valorizado a partir do *logos* grego[12]. A maneira como os resultados da geometria se constituem e se relacionam pelo método dedutivo será enfatizado nesta sessão.

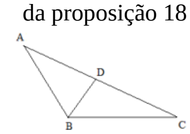
Euclides utiliza em sua obra tanto o procedimento dedutivo tal como as opções de demonstração direta, por redução ao absurdo, entre outras mencionadas por Aristóteles, assim como estabelece os princípios intuitivos como definições, axiomas e postulados. Exemplos de premissas incorporadas ao livro I dos *Elementos* são as definições da linha e da reta. Quanto aos postulados, para Aristóteles uma noção distinta da de axioma [13], citamos o terceiro: "[Fique postulado traçar] com todo centro e distância, descrever um círculo" (EUCLIDES, 2009, p. 98). Entre o que se denomina "noções comuns", citamos a primeira: "As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si" (EUCLIDES, 2009, p. 99). No livro I há um total de 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns. Nos demais livros (II ao XIII) são incluídos outras definições relacionadas ao assunto de matemática tratado.

Euclides demonstra todos os resultados geométricos enunciados e estas demonstrações são organizadas de maneira sistemática e não possui caráter indutivo, sendo todas realizadas, como já comentamos, pela via da dedução, não se ocupando com experimentos (BARKER, 1969).

Os Elementos é uma obra essencialmente dedutiva. Para Aristóteles toda dedução é um silogismo e, sendo assim, podemos, num processo de análise, elaborar silogismos ao longo de toda a obra. A seguir procederemos uma decomposição em silogismos da proposição 18 do livro I de *Os Elementos* como ilustração de análise em que se relaciona aspectos da obra destes dois autores, Euclides e Aristóteles. O exemplo nos permite visualizar os silogismos dedutivos implícitos na demonstração da proposição.

A proposição 18 do livro I que afirma "O maior lado de qualquer triângulo subtende o maior ângulo". Demonstração da proposição 18:

Figura 1 - Ilustração representando a situação da proposição 18



Fonte: EUCLIDES (2009, p. 111)

> *Seja, pois, o triângulo ABC, tendo o lado AC maior do que o AB; digo que também o ângulo sob ABC é maior do que o sob BCA. Pois, como a AC é maior do que a AB, fique posta a AD igual à AB, e fique ligada a BD. E, como o ângulo sob ADB é exterior ao triângulo BCD, é maior do que o sob DCB, interior e oposto; mas o sob ADB é igual ao sob ABD, visto que também o lado AB é igual ao AD; portanto, também o sob ABD é maior do que o sob ACB; portanto, o sob ABC é, por muito, maior do que o sob ACB. Portanto, o maior lado de todo triângulo subtende o maior ângulo; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 111).*

Para a demonstração foi utilizada como pressuposto três proposições (Proposição 3 (P3), Proposição 16 (P16) e Proposição 5 (P5)) anteriormente demonstradas nos Elementos.

Primeiramente, ao afirmar que "pois, como a AC é maior do que a AB, fique posta a AD igual à AB, e fique ligada a BD" temos implícito o argumento P(3) já demonstrado antes desta dedução:

> Premissa 1 (P3): Dadas duas linhas retas desiguais, cortar da linha maior uma parte igual a linha menor.
> Premissa 2: AC > AB
> Conclusão 1: Pode-se cortar uma linha igual a AB em AC. Digamos que esse segmento seja AD.
> Em seguida, utiliza-se da P(16) para mostrar

que o ângulo ADB é maior que DCB:

> Premissa 3 (P16): O ângulo externo de um triângulo é sempre maior que cada um dos ângulos internos e opostos.
> Premissa 4: O ângulo ADB é externo ao triângulo BCD.
> Conclusão 2: O ângulo ADB é maior do que o ângulo BCD.

Para mostrar que o ângulo ABD também é maior que o ACB, Euclides utiliza da P(5).

> Premissa 5 (P5): Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base, são iguais e produzidos os lados iguais, os ângulos, que se formam debaixo da base, são também iguais.
> Premissa 6: o lado AB é igual ao lado AD.
> Conclusão 3: Os ângulos ABD e ADB são iguais.

Neste momento há a retomada de resultados obtidos na própria demonstração.

> Premissa 7 (ou conclusão 2): O ângulo ADB é maior do que o ângulo BCD
> Premissa 8 (ou conclusão 3): Os ângulos ABD e ADB são iguais.
> Conclusão: O ângulo ABD é maior que o ângulo BCD.

Obtém-se a conclusão final, que é a proposição 18: ABC se faz muito maior que BCA.

Assim, podemos retomar Aristóteles a fim de enfatizar elementos de sua lógica nesta proposição18 dos Elementos. Segundo Aristóteles, para se obter a conclusão, a demonstração deve ocorrer por meio do termo médio, que deve aparecer universal pelo menos uma vez. Na demonstração acima, vemos que a conclusão é derivada das premissas ligadas ao termo médio. Por exemplo, na última etapa da demonstração, as premissas 7 e 8 estão ligadas pelo o termo médio “ângulo ADB”, universal, que permite a conclusão.

Com relação a universalidade e a validade absoluta da demonstração podemos dizer que, como as premissas na qual se apoiam as demonstrações já foram demonstradas, e portanto são consideradas verdadeiras, a conclusão da demonstração será considerada irrevogável.

Aristóteles qualifica a demonstração também pelo número de premissas nas quais se apoia, ou seja, quanto menor o número de premissas melhor é a demonstração. Em Os Elementos, Euclides coloca 5 postulados. Segundo, Heath (1981, p. 374) “mais importante ao longo (da obra) são os 5 postulados, onde Euclides coloca os reais princípios de sua geometria; e nada mostra mais claramente sua determinação em reduzir sua afirmação original ao mínimo”, estando então o trabalho de Euclides adequado aos requisitos lógicos Aristotélicos, pelo menos enquanto objetivo.

Conforme mencionamos acima, Aristóteles classifica a demonstração universal como superior em relação à particular, bem como da afirmativa sob a negativa e desta última sob a redução por absurdo. Sobre isso, podemos observar, analisando Os Elementos, que Euclides usa com mais frequência às demonstrações afirmativas do que as negativas. A demonstração por redução ao absurdo, inclusive, aparece poucas vezes. Isto não quer dizer que ele seguia a orientação aristotélica ao privilegiar a demonstração afirmativa. Inclusive, há proposição que pode ser demonstrada diretamente e não é feita assim. Este é o caso da proposição 19 do livro I onde Euclides usa forma de redução por absurdo por exaustão. Esse tipo de demonstração é utilizado também em outras proposições como proposição 6. Mas na proposição 27 aparece uma demonstração por redução ao absurdo tal qual é mencionada por Aristóteles.

Este sistema dedutivo, chamado Os Elementos, por ser demonstrativo, de acordo com Aristóteles, teria o propósito de apresentar as proposições válidas da natureza, as verdades ocultas em outras verdades e alcançar o conhecimento definitivo e eterno do universo.

De fato, a utilização por Euclides de um sistema axiomático dedutivo proporciona clareza e transparência nas conexões lógicas que alcança os resultados da geometria. Isto justificaria o sentido do termo geometria, como a ciência que descreve as propriedades do espaço, ou medida da terra (*geo= terra* e *metria= medida*). Este procedimento dedutivo foi modelo não só na matemática, onde está intrínseco, mas também para as outras ciências que queriam ter resultados abalizados por essa estrutura tão confiável e elucidativa, na medida em que se explicitam os pressupostos.

Entretanto, sabemos que num sistema axiomático as premissas são determinantes. Se as premissas são alteradas, como ocorreu no desenvolvimento das geometrias não euclidianas, os sistemas podem continuar válidos mas o caráter de verdade, associado aos princípios, não se sustenta.

Por exemplo, se trocamos o 5° postulado, esta mudança desencadeia, como é sabido, outras geometrias diferentes da euclidiana, isto é, existem outros sistemas axiomáticos que geram outras geometrias.

Esta potencialidade dos sistemas axiomáticos permite problematizar, do ponto de vista da filosofia da matemática, o estruturalismo neste campo disciplinar. Tanto pela possibilidade esteutural, lógico-dedutiva, de outras geometrias, várias, se quisermos, outros sistemas lógicos foram elaborados a partir de paradoxos (GUILLEN, 1987). Grosso modo, a ideia da matemática como verdade fica comprometida, a ideia de descoberta empírica não se confunde com potencialidade lógica, próprio de sistemas dedutivos.

Considerações Finais

No presente artigo destacamos, inicialmente, que a matemática é frequentemente vista como uma ciência neutra, isto é, independente de contexto sociocultural e político. Em oposição a esta visão, apoiados em Bishop et al. (1999), assumimos a posição de que a matemática, assim como outras áreas do conhecimento, é carregada de valores, que são conduzidos e disseminados, implícita ou explicitamente, em práticas escolares.

Além disso, entendemos que a matemática, bem como a demonstração, disciplina o pensamento, conforme colocado por Chervel (1990). Nesta direção, pode ser acrescentada a abordagem de Popkewitz (2008, p. 184) para quem: “nas escolas aprende-se não apenas sobre o que fazer e o que conhecer. Aprender gramática, ciências ou geografia, é também aprender disposições, consciência e sensibilidade em relação ao mundo que está sendo descrito”. A ênfase de Popkewitz (2008) está dirigida a formas de falar e raciocinar, as quais ele vincula com questões de poder e regulação, assim como a presente proposta pretende em relação à demonstração. Concordamos com Popkewitz (2008, p. 185) no que tange sua afirmação de que “não podemos tomar a razão e a racionalidade como um sistema unificado universal pelo qual podemos falar sobre o que é verdadeiro e falso, mas como sistemas historicamente contingentes de relações cujos efeitos produzem poder”.

Procuramos por meio de um aprofundamento, ver conteúdos matemáticos como um meio de aculturação, de inserção de regras e modos de pensar e agir, sendo a demonstração lógica dedutiva uma forma de raciocinar privilegiada em detrimentos de outros modos. Assim a demonstração foi olhada como disseminando, por meio de sua presença na escola, valores de rigor, precisão e verdade. A presença da demonstração na educação escolar parece perpetuar, atualmente por meio de orientações curriculares brasileiras para a educação básica e PNLD.

Na demonstração da proposição 18 dos Elementos de Euclides foram explicitados, da lógica aristotélica, os silogismos ditos científicos, isto é, em que os pressupostos são verdadeiros, ou seja, os pressupostos demonstrados ou são axiomas ou postulados verdadeiros. Sobre isso, salientamos a diferença entre validade do argumento e veracidade da premissa, sendo que esta veracidade, de fato, não é garantida. As geometrias não euclidianas e as lógicas não clássicas são ótimos exemplos de sistemas válidos com premissas contrárias num sistema em relação a outro. Desse modo cai por terra a ilusão aristotélica de alcançar, pela intuição, verdades iniciais de um sistema. Ao contrário, a distância entre o conhecimento científico e o senso comum foi ficando maior ao longo da mesma história , gerando um fosso, as vezes ignorado.

Discutimos também a tendência em se valorizar o conhecimento dedutivo sob o indutivo e, consequentemente, a superioridade da matemática em relação a outros conhecimentos. A valorização da matemática como um modo de pensar dedutivo, estimula o pensamento racional a abstraçãoa redução, a simplificação, a dicotomia. Por isso no título, a expressão Matemática, adjetivo[14], numa referência a função disciplinar da matemática e o modo de pensar lógico dedutivo recebe privilégios na escola.

O procedimento da demonstração na matemática conduz a crença do conhecimento verdadeiro (VILELA; ANDRADE, 2013), e todo um conjunto de valores que podem ser associados ao proceder demonstrativamente, tal como rigor, precisão, verdade, irrefutabilidade, dentre outros. Assim, continua-se a privilegiar um modo lógico-dedutivo de pensar e de propagar crenças da verdade. A manutenção deste procedimento na escola valoriza e difunde a matemática e um modo de pensar o mundo que está vinculado a esta disciplina.

Notas

1 Ver GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito:** o lado humano das matemáticas, 1ed. Lisboa:

Gradiva, 1987.

2 Esses dados se referem ao investimento do PNLD no ano de 2014. http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didati co/livro-didatico-dados-estatisticos.

3 Esses critérios específicos eliminatórios para a componente curricular matemática do ensino médio também vigora no guia do PNLD referente aos anos finais do ensino fundamental do ano de 2013.

4 Muitas pesquisas desenvolvidas sobre demonstração e prova vem se preocupando em distinguir explicação, prova e demonstração, utilizando como referencial teórico, principalmente, os trabalhos de Balacheff. Para este autor, a prova constitui-se como uma explicação reconhecida e aceita por determinado grupo ou comunidade. Assim, a passagem da explicação para a prova é um processo social. No entanto, a aceitação não é definitiva, podendo mudar com os avanços dos saberes, nos quais a explicação se apoia. Além disso, a prova pode ser aceita por um grupo e não por outro. A demonstração é um tipo de prova que possui uma aceitação muito mais restrita e específica e possui uma forma particular. É um tipo de prova dominante em matemática, sendo uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto de regras. Possuindo uma forma estritamente codificada.

5 Mencionamos a categorização uma vez que também pode ser vista como traço da especialização e sistematização do conhecimento, da divisão do conhecimento em disciplinas (Casanova, 2006), que se manifesta na nossa organização escolar em disciplinas.

6 Mesmo que as contribuições de Frege possam ser colocadas como marco inicial da lógica matemática ou lógica simbólica, esta lógica fregeana respeita as regras de dedução e os princípios da lógica clássica, que passam a compor nas elaborações posteriores a Frege, o que se denomina na lógica matemática, o cálculo proposicional de primeira ordem (VILELA, 1996)..

7 Esclarecemos que, em geral, as proposições serão aqui representadas por letras maiúsculas e os símbolos que empregamos são: NÃO ($\neg$); IMPLICAÇÃO ($\rightarrow$)**;** e ($\wedge$) e ou ($\vee$).

8 "Dependendo da posição do termo médio nas premissas, há 4 classes de silogismos, que Aristóteles chamou de figuras" (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 35).

9 As lógicas não clássicas podem ser divididas basicamente em duas espécies: as complementares e as heterodoxas. As complementares respeitam as regras e os princípios da lógica clássica, apenas inserindo alguns novos operadores, de maneira a completar sua linguagem. Já as heterodoxas questionam e negam a lógica clássica, surgem com a intenção de substituí-la. Ver D'Ottaviano e Feitosa (2009, p. 22).

10 Cada ciência possui sujeitos peculiares, que são supostos simultaneamente quanto ao ser e quanto ao significado: as unidades em aritmética e os pontos e a linha em geometria.

11 Ver LUNGARZO, C. **O Que é lógica**. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1989. (Primeiros Passos, 215); HEGENBERG, L. **Lógica:** simbolização e dedução. São Paulo: Edusp, 1975.

12 Ver CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. 12 ed. São Paulo: Ática, 2000.

13 Aristóteles faz distinção entre postulado e axioma: "Se o discípulo não tiver nenhuma opinião ou se tiver uma opinião contrária, esta mesma suposição é, nesse caso, um postulado, e daqui vem a diferença entre a hipótese e o postulado: o postulado é contrário à opinião do discípulo, demonstrável, mas proposto e utilizável sem demonstração" (76b, p.42). Posteriormente alguns autores fizeram outras distinções entre esses termos. Porém os estudos feitos nos trabalhos de Euclides não permitem chegar à conclusão nenhuma sobre uma possível diferenciação entre tais termos. Ao que parece, Euclides não faz distinção.

14 Nossa expressão **Matemática, adjetivo foi** adaptada do filme *Polícia, Adjetivo* (2009), do diretor romeno Corneliu Porumboiu mencionado em MIGUEL, A. Vidas de professores de matemática: o doce e o dócil do adoecimento. In: GOMES, Maria Laura Magalhães; TEIXEIRA, Inês Assunção de Castro; AUAREK, Wagner Ahmad; PAULA, Maria José. (Org.). **Viver e Contar: experiências e práticas de professores de Matemática**. 1ed. São Paulo (SP): Editora Livraria da Física, 2012, v.1, p. 271-309.

Referências

ARISTÓTELES. **Órganon** IV: Analíticos Posteriores. Pinharada Gomes (Trad.). 1 ed. Lisboa: Guimarães Editores, 1987. 174 p. (Colecção Filosofia e Ensaios).

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba em losalumnos de matemáticas.** Pedro Gómez (Trad.). Bogotá: Interlínea editores LTDA, 2000.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1969. 141p. (Curso Moderno de Filosofia).

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB). **Guia de livros didáticos PNLD 2015**: Matemática. Brasília, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB). **Guia de livros didáticos PNLD 2014**: Matemática. Brasília, 2013.

BISHOP, A. J.; FITZSIMONS, G. E.; CLARKSON, P. C.; SEAH, W. T. **Values in Mathematics Education:** making values teaching explicit in the mathematics classroom, 1999. Disponível em: http://www.aare.edu.au/99pap/bis99188.htm. Acesso em: 17 mar. 2014.

CASANOVA, P. **As novas ciências e as humanidades**. São Paulo: Boitempo, 2006.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria &Educação.** Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

BLOOR, D. **Conhecimento e imaginário social.** Marcelo do Amaral Penna-Forte (Trad.). 2 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009, 287p.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. de A. **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não clássicas**. Disponível em: <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2009.

EUCLIDES. **Os elementos**. Irineu Bicudo (Trad.). 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké.** Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, p. 1-36, 1995.

FREGE, G. **Os fundamentos da Aritmética**. Luís H. dos Santos (Trad.). São Paulo: Abril cultural, 1983.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. 258 p. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Teóricos-Filosóficos) - Instituto de Geociências e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito:** o lado humano das matemáticas, 1ªed. Gradiva, 1987.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**, n.1, v.21, p. 6-13, 1990.

HEATH, T. **A history of Greek Mathematics**. New York, Dover, 1981.

LÖWY, M. **Ideologias e ciência social:** elementos para uma análise marxista. 12ª ed. São Paulo: Cortez, 1998.

MACHADO, N. J; CUNHA, M. O. da. **Lógica e linguagem cotidiana** – Verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2.ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008, 128p. (Coleção Tendências em educação matemática).

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do Professor:** formação na Licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. 195p. Tese (Doutorado em Conhecimento e Inclusão Social) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

PIETROPAOLO, R.C. **(Re)significar a demonstração nos currículo da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

POPKEWITZ, T. S. História do Currículo, Regulação Social e Poder. In: SILVA, T. T. da. **O sujeito da Educação**. 8. ed. Petrópolis: Vozes. 2008, p. 173 - 210.

ROCHA, E. **O que é etnocentrismo**. 5 ed. São Paulo: Editora Brasiliense,1988. 39 p. (Coleção

Primeiros Passos, 124).

THOMPSON, J. B. **Ideologia e Cultura Moderna**. Teoria Social Crítica na Era dos Meios de Comunicação de Massa. 5 ed. Petrópolis/RJ: Vozes, 2005.

PUTMAN, H. **El Pragmatismo.** Barcelona: Gedisa, 2006.

VILELA, D. S**. Análise das críticas de Frege a Cantor:** a noção de número e o emprego da abstração nas definições. 1996. 124p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, SP, 1996.

VILELA, D; DORTA, D.A. O que é "desenvolver o raciocínio lógico"? Considerações pedagógicas a partir do livro Alice no país das maravilhas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 91, p. 634-651, 2010.

VILELA, D.; ANDRADE, A. H. N de. Um diálogo entre a sociologia da ciência e a educação matemática: a simetria e questão dos significados na matemática escolar. In: SILVA, C. C; PRESTES, M. E. B. **Aprendendo ciência e sobre sua natureza:** abordagens históricas e filosóficas. 1. ed. São Carlos: Tipographia, 2013. p. 145-157.

Sobre as autoras:

Denise Silva Vilela: realiza atualmente Pós-doutorado no PECIM-UNICAMP, com apoio da Capes; é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), docente da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), membro do Grupo Interinstitucional PHALA e pesquisadora dos Programa de Pós-graduação em Educação e Programa de Mestrado Profissional em Educação, ambos da UFSCar, e-mail: denisevilela@ufscar.br.

Karine Angélica de Deus; é mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação da UFSCar, bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, e-mail: karineangelicadedeus@gmail.com.

Recebido em 15/06/2014
Aprovado em 11/12/2014