Crianças, adolescentes, jovens e adultos e a resolução de situações combinatórias[1]

Rute Borba*
Cristiane Pessoa**
Fernanda Barreto***
Rita Lima****

Resumo

Participaram da pesquisa 718 estudantes em escolaridade regular (crianças e adolescentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio) e da Educação de Jovens e Adultos – EJA (dos anos iniciais ao Ensino Médio e de um curso profissionalizante) que resolveram duas de cada situação (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). A escolarização teve efeito significativo, relacionada a maiores índices de sistematização nas soluções, embora procedimentos similares tenham sido observados entre os que não haviam participado de instrução em Combinatória e entre os que já haviam aprendido esse conteúdo. A listagem de possibilidades foi o procedimento mais utilizado. *Produtos cartesianos* eram mais facilmente compreendidos e *arranjos*, *combinações* e *permutações* eram mais difíceis, em especial para os jovens e adultos em início de escolarização. Os resultados sugerem a necessidade de um ensino com variedade de situações, significados, relações e representações simbólicas, de modo a favorecer um amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório; Crianças, Adolescentes, Jovens e Adultos; Situações; Representações simbólicas.

Children, teenagers and young adults and the resolution of combinatorial situations

Abstract

Participants were 718 students in regular education (children and teenagers in the early years of Elementary School to High School) and Adult Education (early years to Secondary School and a vocational course) who solved two of each situation (*arrangement*, *combination*, *permutation* and *Cartesian product*). Schooling had significant effects, related to higher rates of systematic solutions, although similar procedures were observed among those who had not participated in Combinatorics instruction and those who had already learned that content. The list of possibilities is the most widely used procedure. *Cartesian products* were more easily understood and *arrangements*, *combinations* and *permutations* were more difficult, particularly for young people and adults in early schooling. The results suggest the need at school for a variety of situations, meanings, relations and symbolic representations in order to facilitate a comprehensive development of combinatorial thinking.

Keywords: Combinatorial Thinking; Children, Teenagers, Youth and Adults; Situations; Symbolic representations.

Importância do raciocínio combinatório e diferentes situações combinatórias

O presente estudo objetivou investigar o raciocínio combinatório numa variedade de experiências escolares (diferentes modalidades e níveis de escolarização) e de situações combinatórias (distintos tipos de problemas). As comparações aqui propostas foram efetuadas a partir dos estudos de Pessoa e Borba (2009, 2010), que investigaram o raciocínio combinatório de crianças e adolescentes em escolarização regular; Lima e Borba (2009), que sondaram o conhecimento de jovens e adultos de distintos módulos da Educação de Jovens e Adultos (EJA); bem como de Barreto e Borba (2010) que levantaram conhecimentos anteriores de estudantes da EJA a partir do qual realizaram um estudo de intervenção (BARRETO e BORBA, 2011).

A variedade proposta – de experiências escolares e de situações combinatórias – é uma das inovações deste estudo, uma vez que investigações anteriores (INHELDER e PIAGET, 1955; SCHLIEMANN, 1988; BRYANT, MORGADO e NUNES, 1992; MORO e SOARES, 2006; dentre outros) envolveram um único tipo de problema

* Endereço eletrônico: resrborba@gmail.com
** Endereço eletrônico: cristianepessoa74@gmail.com
*** Endereço eletrônico: fernandasabarreto@gmail.com
**** Endereço eletrônico: g.lima7@hotmail.com

(*arranjos*, *combinações*, *permutações* ou *produtos cartesianos*) e se limitavam a uma faixa etária. Propôs-se, assim, analisar como estudantes – crianças e adolescentes em processo regular de escolarização e jovens e adultos da EJA – compreendem problemas combinatórios.

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) defendem que o raciocínio combinatório é um componente fundamental do raciocínio formal, como descrito por Inhelder e Piaget (1955). Justifica-se que o raciocínio combinatório seja uma forma mais complexa de pensamento, pois na Combinatória lida-se com situações hipotéticas de levantamento de possibilidades. O pensamento combinatório se faz presente em situações de combinação, análise e categorização de elementos, sendo, assim, uma forma de pensamento mais elaborada.

Defende-se no presente estudo que embora seja uma forma de pensamento mais complexa, o raciocínio combinatório pode iniciar-se na infância e desenvolver-se por um longo período de tempo. Argumenta-se que o estudo da Combinatória pode ser um meio de avanço no raciocínio lógico, em geral, e auxiliar no desenvolvimento matemático de crianças, adolescentes, jovens e adultos.

Entende-se, aqui, raciocínio combinatório como uma forma de pensamento que envolve a contagem, mas que vai além da simples enumeração de elementos de conjuntos. Na Combinatória, grupos de possibilidades são contados, baseados no raciocínio multiplicativo, por intermédio de ações sistemáticas que atendem aos requerimentos de diferentes problemas combinatórios. As estratégias de solução envolvem a constituição de grupos de elementos, a determinação de possibilidades por contagem direta ou indireta dos casos válidos, levando em consideração a escolha dos elementos e a ordenação dos mesmos. Outras relações – além de escolha e ordem – dizem respeito à repetição, ao posicionamento e à proximidade de elementos. Dessa forma, tem-se uma rica variedade de situações que podem ser exploradas no estudo da Combinatória.

Estudos anteriores e documentos (MERAYO, 2001; NUNES e BRYANT, 1996; VERGNAUD, 1983 e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – BRASIL, 1997) apresentam classificações de problemas que incluem os combinatórios. No currículo da Escolarização Básica os problemas combinatórios são categorizados em *produtos cartesianos* (nos anos inicias do Ensino Fundamental, denominados nos PCN de ideia combinatória, por Nunes e Bryant como produtos cartesianos e por Vergnaud como produtos de medidas) ou como *arranjos*, *combinações e permutações* (no Ensino Médio).

No presente estudo, as variadas situações combinatórias são consideradas numa classificação única. A justificativa dessa organização que inclui os quatro tipos de problemas combinatórios (*arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano*) baseia-se em Vergnaud (1990), o qual defende que conceitos são definidos por meio de seus *significados* (ideias constituintes dos conceitos), seus *invariantes* (propriedades e relações que se mantêm constantes nas diversas situações nas quais o conceito se faz presente) e simbolizações utilizadas na *representação* do conceito. Sendo assim, os estudantes devem ter contato com as diferentes situações que dão significado a um conceito e, dessa forma, os variados tipos de problemas combinatórios podem ser compreendidos pelos mesmos. Defende-se, portanto, a necessidade de se considerar os quatro tipos de problemas no ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até ao final do Ensino Médio – tanto na escolarização regular de crianças e adolescentes quanto na Educação de Jovens e Adultos.

As quatro situações básicas de Combinatória, conforme apontadas em Pessoa e Borba (2009) são:

1) Arranjos: A partir de um conjunto único com n elementos, grupos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos .... p elementos são formados, com $0 < p < n$, nos quais a ordem dos elementos implica em possibilidades distintas. Por exemplo: As finais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seleções da Alemanha, Argentina, Brasil e França. De quantas maneiras diferentes se pode ter os 3 primeiros lugares?
2) Combinações: A partir de um conjunto único com n elementos, grupos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos .... p elementos são formados, com $0 < p < n$, nos quais a ordem dos elementos não implica em possibilidades distintas. Por exemplo: Numa escola há 9 professores e 5 deles vão representar a escola num congresso. Quantos grupos de 5 professores podem ser formados?
3) Permutações: Todos os n elementos de um conjunto são utilizados e a ordem de apresentação dos elementos implica em possibilidades distintas. Embora possam matematicamente serem consideradas como

casos particulares de arranjos (nos quais $p=n$), na perspectiva do solucionador, permutações constituem-se em um tipo distinto de situação combinatória, pois outras operações de pensamento são requeridas em suas resoluções. Por exemplo: Qual o número de anagramas (palavras com ou sem sentido) que podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

4) Produtos cartesianos: Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com *n*, com *p*, com *q*... elementos), esses são combinados para formar um novo conjunto, sendo a natureza dos conjuntos originais distinta da do conjunto formado. Por exemplo: Numa dança, há três meninas e quatro meninos. Se cada menino dançar com cada menina, quantos pares serão formados?

Um estudo comparativo de desempenhos em Combinatória de crianças, adolescentes, jovens e adultos

O objetivo específico do presente estudo é verificar o desempenho de estudantes com distintas experiências escolares resolvendo as mesmas situações combinatórias de diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*).

Os estudantes regulares – crianças e adolescentes – eram de três níveis de escolarização: anos iniciais do Ensino Fundamental (de 7 a 10 anos de idade), anos finais do Ensino Fundamental (de 11 a 14 anos) e Ensino Médio (de 15 a 17 anos), num total de 568 participantes. Os estudantes da EJA também frequentavam esses níveis de escolarização e um curso profissionalizante de nível médio, num total de 150 participantes.

Cada participante resolveu oito problemas combinatórios (dois de cada tipo: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). Metade das situações resultava em um menor número de possibilidades e a outra metade tinha como resposta um mais elevado número de possibilidades. Dessa forma pode-se verificar o desempenho em problemas nos quais distintos significados da Combinatória se faziam presentes – com seus respectivos invariantes – e observar as formas de representação simbólica utilizadas, tanto em problemas com menor quanto com maior número de possibilidades. No Quadro 1 podem ser observadas as situações combinatórias apresentadas aos participantes do estudo.

Quadro 1. Situações combinatórias apresentadas aos estudantes que participaram da pesquisa.

1. *Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?*
2. *Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?*
3. *As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?*
4. *Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?*
5. *Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?*
6. *Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?*
7. *Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?*
8. *De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?*

Foram comparados, por intermédio da análise dos protocolos de resolução dos estudantes, os desempenhos e as estratégias utilizadas, por situação escolar (regular X EJA e, dentro de cada modalidade de ensino, os diferentes níveis) e por significados (tipos de problema) presentes nas situações combinatórias.

Apresentação e análise de resultados

Desempenho por situação escolar

Na Tabela 1 pode-se observar o desempenho dos estudantes por situação escolar.

Tabela 1: Média de respostas corretas (dentre 8) por situação escolar.

Situação escolar		Média de respostas corretas (dentre 8)
Regular	Anos iniciais do Ensino Fundamental (7 a 10 anos de idade)	0,75
	Anos finais do Ensino Fundamental (11 a 14 anos de idade)	2,68
	Ensino Médio (15 a 17 anos de idade)	3,45
Educação de Jovens e Adultos	Anos iniciais do Ensino Fundamental	0,22
	Anos finais do Ensino Fundamental	0,93
	Ensino Médio	0,77
	Profissionalizante	2,27

Estão registradas apenas respostas totalmente corretas (com determinação do número total de possibilidades), mas salienta-se que muitos estudantes iniciaram suas soluções corretamente, mas não apresentaram a resposta final correta, principalmente em situações nas quais havia um mais elevado número de possibilidades a serem determinadas. Soluções parcialmente corretas foram encontradas em todos os níveis de ensino. Evidenciando, portanto, que mesmo antes do estudo formal da Combinatória, estudantes são capazes de compreender problemas combinatórios, mas a maioria não é capaz de sistematicamente listar todas as possibilidades requeridas ou de utilizar procedimentos de contagem indireta de todos os casos possíveis e válidos.

Observou-se um efeito da escolarização no desempenho, tanto no ensino regular (entre crianças e adolescentes), quanto na Educação de Jovens e Adultos. O desempenho foi melhor entre os que possuíam maior tempo de estudo formal. Entretanto, esperava-se um desempenho melhor entre os estudantes do Ensino Médio que já haviam estudado Combinatória na escola, tanto os do ensino regular quanto os da EJA profissionalizante. Esses resultados parecem indicar que maior período de escolarização possibilita um melhor desempenho em Combinatória, mas o estudo formal em Combinatória não garante um desempenho significativamente superior.

O muito baixo desempenho dos jovens e adultos dos anos iniciais parece indicar que o desenvolvimento do raciocínio combinatório depende de escolarização. Situações cotidianas – como as presentes no trabalho dos estudantes da EJA – podem ter influência, mas a escolarização parece ter um efeito maior.

Essa constatação está de acordo com Fischbein (1975) que, amparado por resultados de estudos empíricos (FISCHBEIN, PAMPU e MINZAT, 1970), ressaltou o papel da escolarização no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Observou-se naquele estudo que a instrução escolar possibilitou que estudantes de 10 anos de idade avançassem na enumeração sistemática de situações combinatórias.

Também há aqui consonância com os resultados obtidos por Schliemann (1988), que comparou o desempenho de adultos não escolarizados ou com pouca escolarização (cambistas de jogo do bicho e com outras ocupações profissionais) com os de estudantes de nível universitário. Observou-se naquele estudo que a experiência dos cambistas lhes possibilitou um melhor desempenho que os de outros profissionais, mas o desempenho dos estudantes foi superior aos dos adultos. Quanto maior o período de escolarização, melhor foi o desempenho. Schliemann (1988) concluiu que a experiência profissional (voltada a estabelecimento de combinações), se aliada a um maior período de escolarização, pode proporcionar um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório.

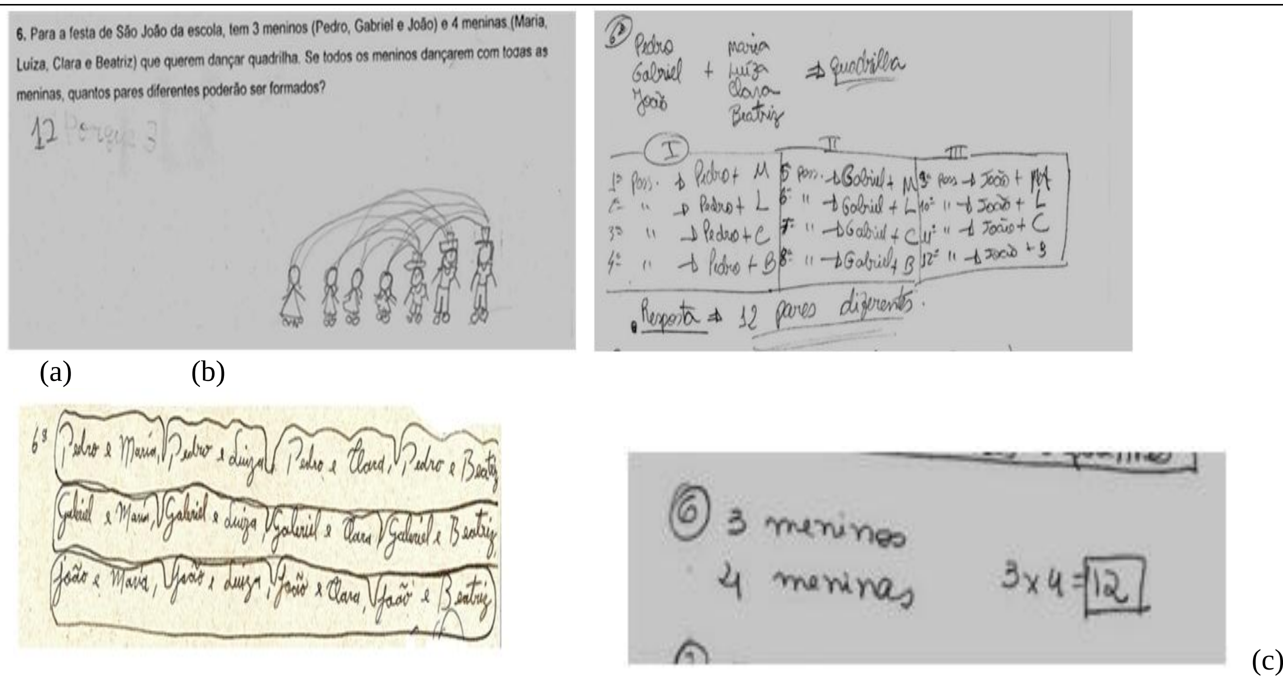
Os resultados do presente estudo parecem confirmar o que Fischbein (1975) defendeu e constatou e o observado por Schliemann (1988) de que a escolarização desempenha um importante papel no desenvolvimento do raciocínio combinatório e que experiências extraescolares podem auxiliar, mas não são suficientes para a melhor compreensão de situações combinatórias. Daí a importância da escola se preocupar em oferecer uma rica variedade de problemas para que os estudantes possam desenvolver competências de enumerar ou contar indiretamente o número total de possibilidades de uma dada situação combinatória.

Estratégias utilizadas por crianças, adolescentes, jovens e adultos

Os adultos da EJA relutaram em resolver as situações combinatórias propostas. Muitas vezes não reconheciam as situações como sendo problemas matemáticos e questionavam como poderiam resolvê-las quando números não eram explicitados (como no caso da *permutação* das letras da palavra AMOR ou o *arranjo* dos três primeiros lugares da Copa do Mundo a partir das seleções da Alemanha, Argentina, Brasil e França).

As crianças e adolescentes estavam mais habituados a problemas dessa natureza – explícita e implicitamente trabalhados na escola – e desenvolveram diferentes procedimentos para lidar com distintas situações combinatórias, como se pode observar na Figura 1. Desenhos, listas e operações aritméticas simples eram formas de representação escrita comumente utilizadas pelos participantes que ainda não haviam sido instruídos em Combinatória, bem como pelos que já haviam estudado o conteúdo na escola.

Figura 1: Exemplos das estratégias variadas utilizadas pelos estudantes para resolver as situações combinatórias.



Alguns poucos participantes usaram procedimentos aditivos. Dessa forma, a maior parte dos estudantes reconheceu que a natureza dos problemas não era aditiva. Esse achado é reforçado pelo número maior de participantes que usaram procedimentos multiplicativos, que mesmo quando inadequados (como produtos que não resolveriam os problemas) indicam um reconhecimento da natureza multiplicativa das situações combinatórias.

O procedimento mais comum foi a listagem de possibilidades – tanto entre crianças e adolescentes, como entre jovens e adultos. Nas situações nas quais o número total de possibilidades era elevado, a listagem nem sempre se mostrou uma estratégia bem sucedida. Os participantes eram mais bem sucedidos quando usavam procedimentos sistemáticos: listando, primeiro, todas as possibilidades iniciadas com determinado elemento, para, em seguida, listar as possibilidades iniciadas com outro elemento e, assim, sucessivamente até esgotar todos os elementos e encontrar todas as possibilidades. Outra estratégia bem sucedida era o reconhecimento de regularidades, ou seja, após listar todos os elementos mantendo constante o primeiro deles e depois de listar todos os elementos mantendo um segundo elemento constante, percebia-se que não era preciso continuar a listar todas as possibilidades referentes a todos os elementos. Se, por exemplo, seis possibilidades são iniciadas com a letra A e mais seis possibilidades iniciadas com a letra M, o número total de possibilidades pode ser obtido pelo produto simples 6 x 4, que é o número de possibilidades iniciadas em cada letra pelo número total de letras da palavra AMOR.

As fórmulas raramente foram utilizadas. Um número muito reduzido de estudantes do Ensino Médio fez uso desse procedimento e nem sempre estavam certos na escolha da fórmula para cada caso específico. Mesmo após conhecerem as fórmulas, muitos estudantes do Ensino Médio preferiram o uso de listagens, pois nelas tinham como controlar o levantamento de todas as possibilidades e para o uso da fórmula teriam que escolher a adequada – conforme o tipo de situação combinatória – e ainda recordar as expressões de cada fórmula.

Desempenho por tipo de problema

As diferenças em desempenho por situação escolar e de acordo com os significados envolvidos podem ser observadas na Tabela 2.

Tabela 2: Média de respostas corretas (de possíveis 2 acertos) por situação escolar e tipo de problema.

Situação escolar	Tipos de problemas (2 possíveis respostas corretas para cada tipo)			
	Arranjos	Combinações	Permutações	Produtos cartesianos
<u>Ensino regular</u> Anos iniciais do Ensino Fundamental	0,11	0,17	0,05	0,42
Anos finais do Ensino Fundamental	0,66	0,25	0,40	1,38
Ensino Médio	0,85	0,23	0,76	1,62
<u>EJA</u> Anos iniciais do Ensino Fundamental	0,02	0,02	0,00	0,18
Anos finais do Ensino Fundamental	0,05	0,05	0,07	0,77
Ensino Médio	0,13	0,10	0,10	0,43
Profissionalizante	0,53	0,47	0,47	0,80

Os resultados obtidos são evidência que os significados envolvidos em cada situação combinatória (seja um *arranjo*, uma *combinação*, uma *permutação* ou um *produto cartesiano*) influenciam diferentemente o desempenho.

Assim, os tipos de problemas combinatórios não são entendidos simultaneamente porque há distintos invariantes (relações e propriedades) específicos a cada um. Embora os quatro tipos de problemas possuam características comuns de levantamento de possibilidades, a partir de dados elementos e de certas condições, cada tipo diferencia-se pela forma como elementos são escolhidos e ordenados, gerando, ou não, possibilidades distintas. Os invariantes das distintas situações combinatórias podem aumentar ou diminuir os níveis de dificuldade de compreensão das mesmas.

Dessa forma, atenção especial é necessária quando da apresentação em sala de aula de situações combinatórias. As mesmas devem ser bem discutidas, ressaltando-se as escolhas a serem efetuadas e da importância, ou não, da ordenação dos elementos na enumeração de todas as possibilidades.

Produtos cartesianos são os problemas combinatórios de mais fácil compreensão para todos os estudantes em todas as situações de escolarização. Pode-se justificar essa facilidade pela familiaridade que os estudantes possuem com esse tipo de problema ou porque é um problema combinatório que por ser de natureza multiplicativa possui uma correspondência um-a-muitos implícita, porém mais clara que a presente em outros tipos de problemas combinatórios. Quanto à familiaridade, esse é o tipo de problema combinatório explicitamente trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, mas uma explicação cognitiva também pode ser considerada para justificar a maior facilidade com *produtos cartesianos*. Nunes e Bryant (1996) salientam que a relação um-a-muitos está na base do raciocínio multiplicativo e esta relação diferencia as situações multiplicativas das aditivas (baseadas na relação parte-todo). A hipótese aqui defendida é que em *produtos cartesianos* a relação um-para-muitos é implícita, mas é ainda mais facilmente identificada do que em outros problemas combinatórios, tais como *arranjos*, *combinações* e *permutações*.

Em problemas de *arranjo*, de um conjunto maior, conjuntos menores são formados e a ordem com que esses elementos são dispostos indicam possibilidades distintas. No caso de *arranjos*, quando os estudantes listam todas as possibilidades, não há necessidade de colocar à parte algumas dessas, como tem que ser feito no caso das *combinações* nas quais se deve observar quais casos são equivalentes, pois em *combinações* os mesmos elementos dispostos em ordens distintas não constituem possibilidades diferentes. Esta ação adicional – de selecionar os casos equivalentes – pode justificar a maior dificuldade com os problemas de *combinação*.

Já comparando *arranjos* e *permutações*, observa-se que essas últimas requerem uma maior sistematização na listagem de todas as possibilidades nas quais os estudantes precisam levar em consideração as seguintes relações: todos os elementos devem ser utilizados, cada um uma única vez (no caso de *permutações* simples, ou seja, sem repetições) e a ordem de apresentação dos elementos é relevante – sendo a propriedade principal das *permutações*. Observou-se no presente estudo que o erro mais comum foi o de listar algumas das possibilidades, mas não se buscou sistematicamente listar todos os casos possíveis.

Nos problemas de *combinação*, como mencionado anteriormente, a ordem de apresentação dos elementos não constitui uma possibilidade distinta e a principal dificuldade dos estudantes do presente estudo foi a de desconsiderar essa propriedade e contar casos que eram equivalentes como se fossem casos distintos.

Considerações finais

A contribuição objetivada no presente estudo era examinar o raciocínio combinatório por meio de uma pesquisa que envolveu um grande número de estudantes de distintas modalidades e níveis de ensino ao resolverem quatros tipos diferentes de problemas. Nesse sentido, pode-se observar, diretamente, a influência da escolarização no raciocínio combinatório e, indiretamente, o papel da maturidade e de experiências extraescolares no desenvolvimento desse modo de pensar.

O principal achado considerando-se a escolarização é que o raciocínio combinatório é influenciado por experiências escolares que podem levar a uma maior sistematização e formalização no entendimento dos variados significados envolvidos na Combinatória. Os fracos desempenhos observados indicam a necessidade de auxiliar estudantes no reconhecimento da natureza multiplicativa das situações combinatórias, destacando-se as correspondências um-a-muitos implícitas em *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*.

O mais fraco desempenho dos estudantes da EJA parece indicar que experiências extraescolares, em particular as profissionais, podem auxiliar, mas não são suficientes para favorecer um maior desenvolvimento do raciocínio combinatório. A escola possui, dessa forma, grande responsabilidade em auxiliar o avanço dos estudantes em sua forma de pensar em combinar elementos a partir de conjuntos dados e situações estabelecidas.

Apesar da maioria dos participantes não ter chegado a resultados finais completos, ou seja, com a indicação do número total de possibilidades de cada situação, ressalta-se que muitos estudantes deram evidência de compreensão das relações combinatórias solicitadas, uma vez que apresentaram casos válidos que satisfaziam as condições postas nas situações. As soluções intuitivas – desenvolvidas antes do ensino formal – e as estratégias personalizadas – não necessariamente resultantes de ensino direto – estavam presentes nos diferentes procedimentos utilizados tanto por crianças, como por adolescentes, jovens e adultos.

Os resultados encontrados trazem evidências para a necessidade de se reconhecer que estudantes desenvolvem seus raciocínios combinatórios desde cedo nos anos iniciais do Ensino Fundamental e não concluem esse desenvolvimento no final do Ensino Médio. Dessa forma, as estratégias espontâneas – surgidas antes do ensino formal – devem ser reconhecidas e podem ser pontos de partida no auxílio aos estudantes na busca de estratégias sistemáticas e uso futuro de procedimentos formais – tais como o uso de fórmulas distintas que devem ser utilizadas após um amplo entendimento da natureza variada de situações combinatórias.

O presente estudo traz importantes reflexões sobre o ensino da Combinatória. Conclui-se que os distintos significados envolvidos, as respectivas relações e propriedades que se mantêm constantes e os variados registros simbólicos devem ser considerados de modo a estimular um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Notas

1 Trabalho parcialmente financiado pela FACEPE (APQ-1095-7.08/08), pelo CNPq (476665/2009-4) e por bolsas de mestrado pela Capes.

Referências

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de um programa de correção de fluxo na modalidade da educação de jovens e adultos. **Anais do VI Encontro Paraibano de Educação Matemática**. Monteiro, Paraíba, 2010.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos**. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, 2011.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virgínia; GODINO, Juan. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics** 32, pp.181-199, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRYANT, Peter; MORGADO, Luísa; NUNES, Terezinha. Children’s understanding of multiplication. **Proceedings of the Annual Conference of the Psychology Mathematics Education**. Tokyo: PME, 1992.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Reidel: Dordrecht. 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology**, nº 40, 1970.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. **De la logique de l’enfant à la logique se l’adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

LIMA, Rita de Cássia Gomes de; BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início de escolarização ao término do ensino médio. **Anais do II Seminário Internacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2009.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A, 2001.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Teresa. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: v. 8, n.1, pp. 99-124, 2006.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Children doing mathematics**. Oxford: Blackwell Publishers, 1996.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** v. 1, p. 1-22, 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké** (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHILIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH; RICHARD; LANDAU, Marsha (Eds.).

Acquisition of mathematics: Concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, Gérard. **La théorie de champs conceptuels. Recherches en Didactique de Mathématiques**, vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, France, pp. 133-170, 1990.

Sobre as autoras:

Rute Borba: Universidade Federal de Pernambuco – Recife/PE.

Cristiane Pessoa: Universidade Federal de Pernambuco – Recife/PE.

Fernanda Barreto: Prefeitura da Cidade do Recife – Recife/PE

Rita Lima: Prefeitura da Cidade do Recife – Recife/PE